INDUKSI MATEMATIKA

MATEMATIKA UMUM KELAS XI

PENYUSUN

Asmar Achmad, S.Pd

SMA Negeri 17 Makassar

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Induksi Matematika	:	Induksi matematika merupakan metode untuk membuktikan bahwa suatu sifat yang didefinisikan pada bilangan asli n adalah bernilai benar untuk semua nilai n yang lebih besar atau sama dengan sebuah bilangan asli tertentu.
Deret	:	Bentuk penjumlahan yang terdiri atas suku-suku barisan bilangan yang tersusun secara berurutan.
Keterbagian	:	Habis dibagi, bukan hanya dapat dibagi
Ketaksamaan	:	Kalimat pernyataan yang menyatakan hubungan tidak sama. Menggunakan tanda hubung $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, atau $\neq$.

PETA KONSEP

Pernyataan Matematis
Logika Matematika
Pernyataan Matematis Bilangan Asli
Pernyataan Matematis Non-Bilangan Asli
Cara Pembuktian
Prinsip Induksi Matematika
1. Langkah Awal
2. Langkah Induksi
Metode Pembuktian Lainnya:
a. Pembuktian Langsung
b. Pembuktian Tidak Langsung
c. Pembuktian Kontradiksi
Pembuktian Deret (Rumus Jumlah Barisan)
Pembuktian Keterbagian Bilangan Bulat
Pembuktian Ketidaksamaan

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Umum
Kelas	:	XI
Alokasi Waktu	:	8 Jam Pelajaran (2 KP)
Judul Modul	:	Induksi Matematika

B. Kompetensi Dasar

3.1. Menjelaskan metode pembuktian Pernyataan matematis berupa barisan, ketidaksamaan, keterbagiaan dengan induksi matematika

4.1. Menggunakan metode pembuktian induksi matematika untuk menguji pernyataan matematis berupa barisan, ketidaksamaan, keterbagiaan

C. Deskripsi Singkat Materi

Induksi matematika merupakan teknik pembuktian yang baku dalam matematika. Melalui induksi Matematika, kita dapat mengurangi langkah pembuktian yang sangat rumit untuk menemukan suatu kebenaran dari pernyataan matematis hanya dengan sejumlah langkah terbatas yang cukup mudah. Prinsip induksi matematika memiliki efek domino (jika domino disusun berjajar dengan jarak tertentu, saat satu ujung domino dijatuhkan ke arah donimo lain, maka semua domino akan jatuh satu per satu).

Gambar 1. Prinsip induksi matematika berlaku dalam pola susunan kartu

Dengan induksi matematika kita dapat melakukan pembuktian kebenaran suatu pernyataan matematika yang berhubungan dengan bilangan asli, tetapi bukan untuk menemukan suatu formula atau rumus.

Modul ini akan membahas tentang prinsip induksi matematik, metode pembuktiannya, dan penerapan induksi matematika pada pembuktian rumus jumlah barisan (deret), keterbagian, dan ketidaksamaan.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Modul ini dirancang untuk memfasilitasi kalian dalam melakukan kegiatan belajar secara mandiri. Untuk menguasai materi ini dengan baik, ikutilah petunjuk penggunaan modul berikut.

1. Berdoalah sebelum mempelajari modul ini.
2. Pelajari uraian materi yang disediakan pada setiap kegiatan pembelajaran secara berurutan.
3. Perhatikan contoh-contoh penyelesaian permasalahan yang disediakan dan kalau memungkinkan cobalah untuk mengerjakannya kembali.
4. Kerjakan latihan soal yang disediakan, kemudian cocokkan hasil pekerjaan kalian dengan kunci jawaban dan pembahasan pada bagian akhir modul.
5. Jika menemukan kendala dalam menyelesaikan latihan soal, cobalah untuk melihat kembali uraian materi dan contoh soal yang ada.
6. Setelah mengerjakan latihan soal, lakukan penilaian diri sebagai bentuk refleksi dari penguasaan kalian terhadap materi pada kegiatan pembelajaran.
7. Di bagian akhir modul disediakan soal evaluasi, silahkan mengerjakan soal evaluasi tersebut agar kalian dapat mengukur penguasaan kalian terhadap materi pada modul ini. Cocokkan hasil pengerjaan kalian dengan kunci jawaban yang tersedia.
8. Ingatlah, keberhasilan proses pembelajaran pada modul ini tergantung pada kesungguhan kalian untuk memahami isi modul dan berlatih secara mandiri.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **2** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Metode Pembuktian dengan Induksi Matematika

Kedua : Penerapan Induksi Matematika

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
METODE PEMBUKTIAN DENGAN INDUKSI MATEMATIKA

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan kalian dapat menjelaskan metode pembuktian dengan induksi matematika, menjelaskan prinsip induksi matematika, dan menggunakan induksi matematika untuk membuktikan pernyataan matematis.

B. Uraian Materi

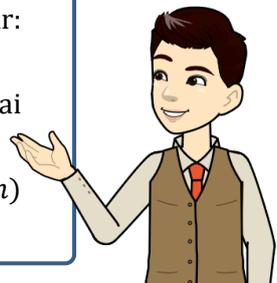
Induksi matematika adalah salah satu metode pembuktian dalam matematika. Secara umum, Induksi matematika merupakan metode untuk membuktikan bahwa suatu sifat yang didefinisikan pada bilangan asli n adalah bernilai benar untuk semua nilai n yang lebih besar atau sama dengan sebuah bilangan asli tertentu. Melalui induksi Matematika, kita dapat mengurangi langkah pembuktian yang sangat rumit untuk menemukan suatu kebenaran dari pernyataan matematis hanya dengan sejumlah langkah terbatas yang cukup mudah.

Perlu ditekankan bahwa dengan induksi matematika kita dapat melakukan pembuktian kebenaran suatu pernyataan matematika yang berhubungan dengan bilangan asli, tetapi bukan untuk menemukan suatu formula atau rumus.

Prinsip Induksi Matematika

Misalkan $P(n)$ adalah sifat yang didefinisikan untuk suatu bilangan asli n, dan misalkan pula a merupakan suatu bilangan asli tertentu. Andaikan dua pernyataan berikut bernilai benar:

1. $P(a)$ bernilai benar.
2. Untuk sebarang bilangan asli $k \geq a$, jika $P(k)$ bernilai benar, maka $P(k+1)$ juga bernilai benar.

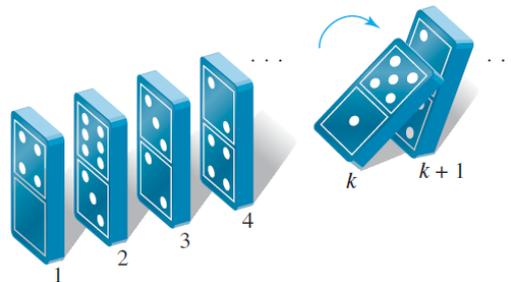
Maka pernyataan untuk sebarang bilangan asli $n \geq a$, $P(n)$ bernilai benar.

Untuk memberikan gambaran ide tentang induksi matematika, bayangkan sebarisan kartu-kartu domino seperti pada gambar.

Gambar 1. Efek Domino

Kita gunakan dua asumsi:

1. Kartu domino pertama dijatuhkan.
2. Jika suatu kartu domino dijatuhkan, maka kartu domino berikutnya juga akan jatuh.

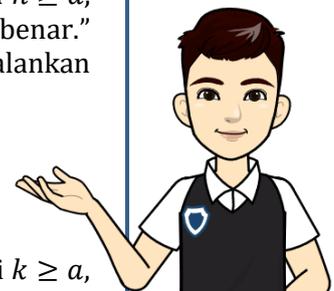
Jika dua asumsi tersebut benar, maka seluruh kartu domino juga akan jatuh.

Untuk melihat hubungan hal tersebut dengan prinsip induksi matematika, kita misalkan $P(n)$ adalah kalimat "domino ke-n akan jatuh". Ini dapat dinyatakan bahwa jika $P(1)$ benar (domino pertama jatuh), maka untuk sebarang $k \geq 1$, jika $P(k)$ bernilai benar (domino ke-k jatuh), maka $P(k+1)$ juga bernilai benar (domino ke-$(k+1)$ juga jatuh). Menurut prinsip induksi matematika, maka $P(n)$, yaitu domino ke-n jatuh, juga bernilai benar untuk sebarang bilangan asli $n \geq 1$.

Gambar 2. Prinsip induksi matematika pada efek domino

Pembuktian dengan induksi matematika terdiri dari dua langkah. Langkah pertama disebut sebagai langkah dasar (*basis step*), dan langkah kedua disebut sebagai langkah induktif (*inductive step*).

Metode pembuktian dengan induksi matematika

Pandang suatu pernyataan "Untuk sebarang bilangan asli $n \geq a$, dengan a adalah bilangan asli tertentu, sifat $P(n)$ bernilai benar." Untuk membuktikan pernyataan tersebut, kita akan menjalankan dua langkah berikut:

- Langkah dasar (*basis step*)
  Akan ditunjukkan bahwa $P(a)$ bernilai benar.
- Langkah induktif (*inductive step*)
  Akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan asli $k \geq a$, dengan a adalah bilangan asli tertentu, jika $P(k)$ bernilai benar maka $P(k+1)$ juga bernilai benar.

Pada proses pembuktian dengan Prinsip Induksi Matematika, untuk langkah awal tidak selalu dipilih untuk $n = 1$, $n = 2$, atau $n = 3$, tetapi dapat dipilih sebarang nilai n sedemikian sehingga dapat mempermudah supaya proses langkah awal dipenuhi. Selanjutnya, yang ditemukan pada langkah awal merupakan modal untuk langkah induksi. Artinya, jika $P(1)$ benar, maka $P(2)$ benar; jika $P(2)$ benar maka $P(3)$ benar; demikian seterusnya hingga disimpulkan $P(k)$ benar. Dengan menggunakan $P(k)$ benar, maka akan ditunjukkan $P(k + 1)$ benar.

Jika $P(n)$ memenuhi kedua prinsip induksi matematika, maka pernyataan matematis P(n) terbukti benar. Jika salah satu dari kedua prinsip tidak dipenuhi, maka pernyataan matematis $P(n)$ salah. Perhatikan bahwa pada langkah induktif, kita tidak membuktikan bahwa $P(k)$ benar. Kita hanya menunjukkan bahwa jika $P(k)$ benar,

maka $P(k+1)$ juga benar. Pemisalan bahwa $P(k)$ benar tersebut dinamakan hipotesis induktif.

Contoh 1.

Buktikan dengan induksi matematika bahwa jumlah n bilangan ganjil positif yang pertama sama dengan n^2.

Jawab

Kita ketahui pola bilangan ganjil positif adalah $(2n - 1)$ untuk n bilangan asli.

Akan kita tunjukkan bahwa: $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

Misalkan $P(n)$ adalah persamaan

$$P(n) = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

Untuk membuktikan kebenaran pernyataan $P(n)$, kita harus menyelidiki apakah $P(n)$ memenuhi prinsip induksi matematika, yaitu langkah dasar dan langkah induksi.

- Langkah dasar

  Akan ditunjukkan bahwa $P(1)$ bernilai benar.

  Untuk $n = 1$, maka $P(1) = 1 = 1^2 = 1$.

  Jadi $P(1)$ bernilai benar. (Langkah dasar selesai)

- Langkah induktif

  Akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan asli $n = k \geq 1$, jika $P(k)$ bernilai benar maka $P(k+1)$ juga bernilai benar.

  Misalkan bahwa $P(k)$ diasumsikan bernilai benar untuk sebarang bilangan asli $n = k \geq 1$, yaitu

  $$P(k) = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$

  Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk $n = k + 1$ maka $P(k+1)$ juga bernilai benar, yaitu

  $$P(k+1) = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$$

  Karena $P(k) = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k - 1) = k^2$ adalah pernyataan yang benar, maka dari ruas kiri $P(k+1)$ diperoleh:

  $$\begin{aligned} 1+3+5+7+\ldots+(2k-1)+(2(k+1)-1) &= \underbrace{(1+3+5+7+\ldots+(2k-1))}_{P(k)}+(2(k+1)-1) \\ &= k^2+(2k+2-1) \\ &= k^2+2k+1 \\ &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

  Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai)

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah selesai, maka menurut prinsip induksi matematis terbukti bahwa: $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 1$. Jadi disimpulkan bahwa jumlah n bilangan ganjil positif yang pertama sama dengan n^2, dengan n bilangan asli.

Contoh 2.

Buktikan bahwa jumlah n bilangan asli yang pertama sama dengan $\frac{n(n+1)}{2}$.

Jawab

Akan dibuktikan bahwa untuk sebarang bilangan asli $n \geq 1$, maka

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Misalkan $P(n)$ adalah persamaan

$$P(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Langkah dasar

  Akan ditunjukkan bahwa $P(1)$ bernilai benar.

  Untuk n = 1, maka ruas kiri $P(1)$ = 1 dan ruas kanan $P(1) = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

  Jadi $P(1)$ bernilai benar. (Langkah dasar selesai)

- Langkah induktif

  Akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan asli $n = k \geq 1$, jika $P(k)$ bernilai benar maka $P(k+1)$ juga bernilai benar.

  Misalkan bahwa $P(k)$ diasumsikan bernilai benar untuk sebarang bilangan asli $n = k \geq 1$, yaitu

$$P(k) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

  Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk $n = k + 1$ maka $P(k+1)$ juga bernilai benar, yaitu

$$P(k+1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)\big((k+1)+1\big)}{2}$$

  atau ekuivalen dengan

$$P(k+1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

  Karena $P(k) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ adalah pernyataan yang benar, maka dari ruas kiri $P(k+1)$ diperoleh:

$$\begin{aligned}
1+2+3+4+\ldots+k+(k+1) &= \underbrace{(1+2+3+4+\ldots+k)}_{P(k)}+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2} \\
&= \frac{k^2+k}{2}+\frac{2k+2}{2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{k^2 + 3k + 2}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai)

Karena langkah dasar dan langkah induktif dipenuhi, maka menurut prinsip induksi matematis terbukti bahwa $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 1$.

Contoh 3.

Buktikan dengan induksi matematika bahwa

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

untuk setiap *n* bilangan asli.

Jawab

Misalkan $P(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$

- Langkah dasar
  Akan ditunjukkan bahwa $P(1)$ bernilai benar.
  Ambil $n = 1$, diperoleh

  $$P(1) = \frac{1}{(2(1)-1)(2(1)+1)} = \frac{1}{2(1)+1}$$

  $$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

  Jadi $P(1)$ bernilai benar. (Langkah dasar selesai)

- Langkah Induktif
  Akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan asli $n = k \geq 1$, jika $P(k)$ bernilai benar maka $P(k+1)$ juga bernilai benar.

  Misalkan bahwa $P(k)$ diasumsikan bernilai benar untuk sebarang bilangan asli $n = k \geq 1$, yaitu

  $$P(k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{k}{2k+1}$$

  Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk $n = k + 1$ maka $P(k+1)$ juga bernilai benar, yaitu

  $$P(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{k+1}{2(k+1)+1} = \frac{k+1}{2k+3}$$

  Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh:

  $$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}}_{P(k)} + \sum_{i=k+1}^{k+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$$

$$= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}$$

$$= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{k+1}{2k+3}$$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai).

Jadi, disimpulkan bahwa $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$ untuk setiap n bilangan asli.

Contoh 4.

Tunjukkan dengan induksi matematis bahwa

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

untuk sebarang bilangan bulat nonnegatif n.

Jawab

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

untuk sebarang bilangan bulat nonnegatif n.

- Langkah dasar

  $P(0)$ benar karena di ruas kiri $P(0) = 2^0 = 1$ dan di ruas kanan $2^{0+1} - 1 = 1$. Langkah dasar selesai.

- Langkah induktif

  Untuk hipotesis induktif, kita asumsikan bahwa $P(k)$ benar untuk sebarang bilangan bulat nonnegatif k, yaitu

  $$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

  Menggunakan asumsi tersebut, selanjutnya $P(k+1)$ juga harus ditunjukkan benar.

  Kita menunjukkan bahwa $P(k+1)$:

  $$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} &= 2^{(k+1)+1} - 1 \\ &= 2^{k+2} - 1 \end{aligned}$$

  Dengan asumsi $P(k)$ benar, maka

  $$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} &= \left(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k\right) + 2^{k+1} \\ &= \left(2^{k+1} - 1\right) + 2^{k+1} \\ &= 2 \cdot 2^{k+1} - 1 \\ &= 2^{k+2} - 1 \end{aligned}$$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai)

Karena langkah dasar dan langkah induktif dipenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika $P(n)$ benar untuk sebarang bilangan bulat nonnegatif n. Dengan demikian terbukti bahwa
$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ untuk sebarang bilangan bulat nonnegatif n.

Contoh 5.

Buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk setiap bilangan asli $n \geq 1$, berlaku

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

Jawab

Misalkan $\text{P(n)}=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

- Langkah dasar
  Ambil $n = 1$ sehingga diperoleh
  $$\text{P(1)}=\frac{1}{1(1+1)}=\frac{1}{1+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$
  Berarti untuk $n = 1$, P(1) bernilai benar. Langkah dasar selesai.

- Langkah induktif

  Misalkan $n = k$, berarti
  $$P(k)=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+...+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$
  Asumsikan $P(k)$ benar untuk sebarang bilangan asli.

  Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk $n = k + 1$ maka $P(k+1)$ juga bernilai benar, yaitu
  $$P(k+1)=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+...+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

  Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh:
  $$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+...+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
  $$=\underbrace{\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+...+\frac{1}{k(k+1)}}_{P(k)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
  $$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
  $$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$
  $$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$
  $$=\frac{(k+1)(k+1)}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai)

Karena langkah dasar dan langkah induktif dipenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika $P(n)$ benar untuk sebarang bilangan asli $n \geq 1$.

Jadi, disimpulkan bahwa $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ berlaku untuk sebarang bilangan asli $n \geq 1$.

C. Rangkuman

- Induksi matematika merupakan metode untuk membuktikan bahwa suatu sifat yang didefinisikan pada bilangan asli n adalah bernilai benar untuk semua nilai n yang lebih besar atau sama dengan sebuah bilangan asli tertentu tertentu.
- Prinsip Induksi Matematika
  Misalkan $P(n)$ adalah sifat yang didefinisikan untuk suatu bilangan asli n, dan misalkan pula a merupakan suatu bilangan asli tertentu. Andaikan dua pernyataan berikut bernilai benar:
  1. $P(a)$ bernilai benar.
  2. Untuk sebarang bilangan asli $k \geq a$, jika $P(k)$ bernilai benar, maka $P(k+1)$ juga bernilai benar.

  Maka pernyataan untuk sebarang bilangan asli $n \geq a$, $P(n)$ bernilai benar.
- Metode pembuktian dengan induksi matematika
  Pandang suatu pernyataan "Untuk sebarang bilangan asli $n \geq a$, dengan a adalah bilangan asli tertentu, sifat $P(n)$ bernilai benar." Untuk membuktikan pernyataan tersebut, kita akan menjalankan dua langkah berikut:
  1. Langkah dasar (*basis step*)
     Akan ditunjukkan bahwa $P(a)$ bernilai benar.
  2. Langkah induktif (*inductive step*)
     Akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan asli $k \geq a$, dengan a adalah bilangan asli tertentu, jika $P(k)$ bernilai benar maka $P(k+1)$ juga bernilai benar.

D. Latihan Soal

1. Untuk setiap rumusan $P(k)$ yang diberikan, tentukan masing-masing $P(k+1)$.

   a. $P(k) = \frac{5}{k(k+1)}$

   b. $P(k) = \frac{1}{2(k+2)}$

   c. $P(k) = \frac{k^2(k+3)^2}{6}$

   d. $P(k) = \frac{k}{3}(2k+1)$

   e. $P(k) = \frac{3}{(k+2)(k+3)}$

2. Gunakan prinsip induksi matematika untuk membuktikan bahwa rumus berikut benar untuk sebarang bilangan asli n.

a. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$
b. $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$
c. $(1.1!) + (2.2!) + (3.3!) + \cdots + (n.n!) = (n + 1)! - 1$
d. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
e. $2(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1}) = 3^n - 1$

3. Gunakan prinsip induksi matematika untuk membuktikan kebenaran pernyataan berikut.

a. $\sum_{i=1}^{n}(3i-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$ untuk setiap bilangan asli *n*.
b. $\sum_{i=1}^{n}2^{i-1} = 2^n - 1$ untuk setiap bilangan asli *n*.
c. $\sum_{i=1}^{n}i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ untuk setiap bilangan asli *n*.
d. $\sum_{i=1}^{n}i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ untuk setiap bilangan asli *n*.

PEMBAHASAN LATIHAN SOAL KEGIATAN PEMBELAJARAN 1

1. Alternatif penyelesaian

   Untuk setiap rumusan $P(k)$ yang diberikan, tentukan masing-masing $P(k+1)$.

   a. $P(k) = \frac{5}{k(k+1)}$

   $$P(k+1) = \frac{5}{(k+1)((k+1)+1)} = \frac{5}{(k+1)(k+2)}$$

   b. $P(k) = \frac{1}{2(k+2)}$

   $$P(k+1) = \frac{1}{2((k+1)+2)} = \frac{1}{2(k+3)} = \frac{1}{2k+6}$$

   c. $P(k) = \frac{k^2(k+3)^2}{6}$

   $$P(k+1) = \frac{k^2(k+3)^2}{6} = \frac{(k+1)^2((k+1)+3)^2}{6} = \frac{(k+1)^2(k+4)^2}{6}$$

   d. $P(k) = \frac{k}{3}(2k+1)$

   $$P(k+1) = \frac{(k+1)}{3}(2(k+1)+1) = \frac{(k+1)}{3}(2k+3) = \frac{(k+1)(2k+3)}{3}$$

   e. $P(k) = \frac{3}{(k+2)(k+3)}$

   $$P(k+1) = \frac{3}{((k+1)+2)((k+1)+3)} = \frac{3}{(k+3)(k+4)}$$

2. Gunakan prinsip induksi matematika untuk membuktikan bahwa rumus berikut benar untuk sebarang bilangan asli n.

   a. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$
   Misalkan $P(n)$ = $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$

   Langkah Dasar:
   Untuk n = 1, diperoleh $P(1)$ = 2 = 1(1 + 1) = 1(2)
   Pernyataan benar untuk n = 1 (langkah dasar selesai).

   Langkah Induksi:
   Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

   $$P(k) = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k(k+1)$$

   Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ juga benar

   $$P(k+1) = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2(k+1) = (k+1)(k+2)$$

   Dari ruas kiri $P(k+1)$ diperoleh

   $$\begin{aligned} 2+4+6+...+2k+2(k+1) &= \underbrace{(2+4+6+...+2k)}_{P(k)}+2(k+1) \\ &= k(k+1)+2(k+1) \\ &= k^2+1+2k+2 \\ &= k^2+2k+3 \\ &= (k+1)(k+2) \end{aligned}$$

   Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai). Karena langkah dasar dan langkah induktif dipenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika peryataan $P(n)$ benar untuk setiap n bilangan asli.

b. $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$

Misalkan $P(n) = 1 + 4 + 7 + ... + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$

Langkah Dasar:

Untuk n = 1, diperoleh $P(1) = 1 = \frac{1(3(1)-1)}{2} = \frac{2}{2}$

Pernyataan benar untuk n = 1 (langkah dasar selesai).

Langkah Induksi:

Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

$$P(k) = 1 + 4 + 7 + ... + (3k-2) = \frac{k(3k-1)}{2}$$

Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ juga benar

$$P(k+1) = 1 + 4 + 7 + ... + (3k-2) + (3(k+1)-2) = \frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2}$$

Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh

$$\begin{aligned}1 + 4 + 7 + ... + (3k-2) + (3(k+1)-2) &= \underbrace{(1 + 4 + 7 + ... + (3k-2))}_{P(k)} + (3(k+1)-2) \\ &= \frac{k(3k-1)}{2} + (3(k+1)-2) \\ &= \frac{k(3k-1) + 2(3k+1)}{2} \\ &= \frac{3k^2 - k + 6k + 2}{2} \\ &= \frac{3k^2 + 5k + 2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(3k+2)}{2} = \frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2}\end{aligned}$$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai). Karena langkah dasar dan langkah induktif dipenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika peryataan $P(n)$ benar untuk setiap n bilangan asli.

c. $(1.1!) + (2.2!) + (3.3!) + \cdots + (n.n!) = (n+1)! - 1$

Misalkan $P(n) = (1.1!) + (2.2!) + (3.3!) + ... + (n.n!) = (n+1)! - 1$

Langkah Dasar:

Untuk n = 1, diperoleh $P(1) = (1.1!) = (1+1)! - 1$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = 2! - 1 = 2 - 1$$

Pernyataan benar untuk n = 1 (langkah dasar selesai).

Langkah Induksi:

Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

$$P(k) = (1.1!) + (2.2!) + (3.3!) + ... + (k.k!) = (k+1)! - 1$$

Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ juga benar

$$P(k+1) = (1.1!) + (2.2!) + (3.3!) + ... + (k.k!) + ((k+1).(k+1)!) = ((k+1)+1)! - 1$$

Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh

$$\begin{aligned}&(1.1!) + (2.2!) + (3.3!) + ... + (k.k!) + ((k+1).(k+1)!) \\ &= \underbrace{(1.1!) + (2.2!) + (3.3!) + ... + (k.k!)}_{P(k)} + ((k+1).(k+1)!) \\ &= (k+1)! - 1 + ((k+1).(k+1)!)\end{aligned}$$

$= (k+1).(k+1)!+(k+1)!-1$
$= (k+2).(k+1)!-1$
$= (k+2)!-1=((k+1)+1)!-1$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai). Karena langkah dasar dan langkah induktif dipenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika peryataan $P(n)$ benar untuk setiap n bilangan asli.

d. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Misalkan $P(n)=1.2+2.3+3.4+...+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Langkah Dasar:

Untuk n = 1, diperoleh $P(1)=1.2=\dfrac{1(1+1)(1+2)}{3}$

$$\Leftrightarrow \; 2=\frac{2(3)}{3}=2$$

Pernyataan benar untuk n = 1 (langkah dasar selesai).

Langkah Induksi:

Untuk n = k dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

$$P(k)=1.2+2.3+3.4+...+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ juga benar

$$P(k+1)=1.2+2.3+3.4+...+k(k+1)+(k+1)((k+1)+1)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Dari ruas kiri $P(k+1)$ diperoleh

$1.2+2.3+3.4+...+k(k+1)+(k+1)((k+1)+1)$

$= \underbrace{1.2+2.3+3.4+...+k(k+1)}_{P(k)}+(k+1)((k+1)+1)$

$= \dfrac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)$

$= \dfrac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}$

$= \dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai). Karena langkah dasar dan langkah induktif dipenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika peryataan $P(n)$ benar untuk setiap n bilangan asli.

e. $2(1+3+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1}) = 3^n - 1$

Misalkan $P(n)=2(1+3+3^2+3^3+...+3^{n-1})=3^n-1$

Langkah Dasar:

Untuk n = 1, diperoleh $P(1)=2(1)=3^1-1$

$$\Leftrightarrow \; 2=3-1$$

Pernyataan benar untuk n = 1 (langkah dasar selesai).

Langkah Induksi:

Untuk n = k dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

$$P(k)=2(1+3+3^2+3^3+...+3^{k-1})=3^k-1$$

Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ juga benar

$$P(k+1) = 2(1+3+3^2+3^3+...+3^{k-1}+3^{(k+1)-1}) = 3^{k+1}-1$$

Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh

$$\begin{aligned} 2(1+3+3^2+3^3+...+3^{k-1}+3^{(k+1)-1}) &= 2(1+3+3^2+3^3+...+3^{k-1}) + 2(3^{(k+1)-1}) \\ &= \underbrace{2(1+3+3^2+3^3+...+3^{k-1})}_{P(k)} + 2(3^{(k+1)-1}) \\ &= (3^k - 1) + 2(3^k) \\ &= 3.3^k - 1 \\ &= 3^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai). Karena langkah dasar dan langkah induktif dipenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika peryataan $P(n)$ benar untuk setiap n bilangan asli.

3. Gunakan prinsip induksi matematika untuk membuktikan kebenaran pernyataan berikut.

   a. $\sum_{i=1}^{n}(3i-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$ untuk setiap bilangan asli n.

   Misalkan $P(n) = \sum_{i=1}^{n}(3i-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$

   Langkah Dasar:

   Untuk $n = 1$, diperoleh $P(1) = \sum_{i=1}^{1}(3i-2) = 3(1)-2 = \frac{1(3(1)-1)}{2}$

   $$\Leftrightarrow \; 1 = \frac{2}{2}$$

   Pernyataan benar untuk $n = 1$ (langkah dasar selesai).

   Langkah Induksi:

   Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

   $$P(k) = \sum_{i=1}^{k}(3i-2) = \frac{k(3k-1)}{2}$$

   Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ juga benar

   $$P(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1}(3i-2) = \frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2}$$

   Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh

   $$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1}(3i-2) &= \underbrace{\sum_{i=1}^{k}(3i-2)}_{P(k)} + \sum_{i=k+1}^{k+1}(3i-2) \\ &= \frac{k(3k-1)}{2} + \sum_{i=k+1}^{k+1}(3i-2) \\ &= \frac{k(3k-1)}{2} + (3(k+1)-2) \\ &= \frac{k(3k-1)}{2} + (3k+1) \\ &= \frac{k(3k-1)+2(3k+1)}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{3k^2 - k + 6k + 2}{2}$$
$$= \frac{3k^2 + 5k + 2}{2}$$
$$= \frac{(k+1)(3k+2)}{2} = \frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2}$$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai). Karena langkah dasar dan langkah induktif dipenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika peryataan $P(n)$ benar untuk setiap n bilangan asli.

b. $\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = 2^n - 1$ untuk setiap bilangan asli n.

Misalkan $P(n) = \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = 2^n - 1$

Langkah Dasar:

Untuk n = 1, diperoleh $P(1) = \sum_{i=1}^{1} 2^{i-1} = 2^{1-1} = 2^1 - 1$

$$\Leftrightarrow \quad 2^0 = 2 - 1 = 1$$

Pernyataan benar untuk n = 1 (langkah dasar selesai).

Langkah Induksi:

Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

$$P(k) = \sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} = 2^k - 1$$

Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ juga benar

$$P(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} 2^{i-1} = 2^{k+1} - 1$$

Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh

$$\sum_{i=1}^{k+1} 2^{i-1} = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} 2^{i-1}}_{P(k)} + \sum_{i=k+1}^{k+1} 2^{i-1}$$
$$= (2^k - 1) + \sum_{i=k+1}^{k+1} 2^{i-1}$$
$$= (2^k - 1) + 2^{(k+1)-1}$$
$$= 2^k - 1 + 2^k$$
$$= 2.2^k - 1$$
$$= 2^{k+1} - 1$$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai). Karena langkah dasar dan langkah induktif dipenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika peryataan $P(n)$ benar untuk setiap n bilangan asli.

c. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ untuk setiap bilangan asli n.

Misalkan $P(n) = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Langkah Dasar:

Untuk n = 1, diperoleh $P(1) = \sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = \frac{2^2}{4} = \frac{4}{4}$$

Pernyataan benar untuk n = 1 (langkah dasar selesai).

Langkah Induksi:

Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

$$P(k) = \sum_{i=1}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ juga benar

$$P(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2((k+1)+1)^2}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i^3 &= \underbrace{\sum_{i=1}^{k} i^3}_{P(k)} + \sum_{i=k+1}^{k+1} i^3 \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \sum_{i=k+1}^{k+1} i^3 \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\
&= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2(k^2 + 4(k+1))}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai). Karena langkah dasar dan langkah induktif dipenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika peryataan $P(n)$ benar untuk setiap n bilangan asli.

d. $\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ untuk setiap bilangan asli n.

Misalkan $P(n) = \sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Langkah Dasar:

Untuk n = 1, diperoleh $P(1) = \sum_{i=1}^{1} i(i+1) = 1(1+1) = \frac{1(1+1)(1+2)}{3}$

$$\Leftrightarrow \quad 2 = \frac{2(3)}{3} = 2$$

Pernyataan benar untuk n = 1 (langkah dasar selesai).

Langkah Induksi:

Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

$$P(k)=\sum_{i=1}^{k} i(i+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ juga benar

$$P(k+1)=\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1)=\frac{(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2)}{3}=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1) &= \underbrace{\sum_{i=1}^{k} i(i+1)}_{P(k)}+\sum_{i=k+1}^{k+1} i(i+1) \\
&= \frac{k(k+1)(k+2)}{3}+\sum_{i=k+1}^{k+1} i(i+1) \\
&= \frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)((k+1)+1) \\
&= \frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2) \\
&= \frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}
\end{aligned}$$

Kedua ruas dari $P(k + 1)$ sama, maka $P(k + 1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai). Karena langkah dasar dan langkah induktif dipenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika peryataan $P(n)$ benar untuk setiap n bilangan asli.

E. Penilaian Diri

Isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda pada kolom pilihan.

No	Pertanyaan	Ya	Tidak
1	Apakah Anda tahu yang dimaksud pernyataan matematis?	◯	◯
2	Apakah Anda tahu yang dimaksud induksi matematika?	◯	◯
3	Apakah Anda dapat menjelaskan prinsip induksi matematika?	◯	◯
4	Apakah Anda dapat menjelaskan metode pembuktian dengan induksi matematika?	◯	◯
5	Apakah Anda dapat membuktikan pernyataan matematis dengan induksi matematika?	◯	◯
JUMLAH			

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
PENERAPAN INDUKSI MATEMATIKA

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan kalian dapat menggunakan induksi matematika untuk membuktikan pernyataan matematis berupa rumus jumlah barisan (deret), keterbagian, dan ketidaksamaan.

B. Uraian Materi

Dalam penerapannya, prinsip induksi matematika dapat digunakan untuk membuktikan rumus jumlah barisan (deret), ketidaksamaan, dan keterbagian bilangan bulat.

1. Penerapan Induksi Matematika pada Rumus Jumlah Barisan (Deret)

Sebelum melakukan pembuktian jumlah barisan (deret), ada beberapa hal yang perlu kalian pahami terkait deret bilangan, yaitu:

Jika $P(n) = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = Sn$, maka
$P(1) = u_1 = S_1$
$P(k) = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_k = S_k$
$P(k + 1) = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_k + u_{k+1} = S_{k+1}$

Contoh 1.

Gunakan induksi matematis untuk membuktikan bahwa rumus jumlah berhingga dari deret aritmetika dengan suku pertama a dan beda b adalah

$$a+(a+b)+(a+2b)+...+(a+(n-1)b)=\frac{1}{2}n(2a+(n-1)b)$$

dengan n adalah bilangan asli.

Jawab

Misalkan $P(n)=a+(a+b)+(a+2b)+...+(a+(n-1)b)=\frac{1}{2}n(2a+(n-1)b)$

Langkah dasar:

Untuk $n = 1$, $P(1)$ benar, karena

$$P(1)=\frac{1}{2}.1(2a+(1-1)b)=\frac{1}{2}(2a)=a$$

Langkah dasar selesai.

Langkah Induktif:

Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

$$P(k)=a+(a+b)+(a+2b)+...+(a+(k-1)b)=\frac{1}{2}k(2a+(k-1)b)$$

Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ juga benar

$$P(k+1) = a + (a+b) + (a+2b) + ... + (a+(k-1)b) + (a+((k+1)-1)b)$$

$$= \frac{1}{2}(k+1)(2a+((k+1)-1)b) = \frac{1}{2}(k+1)(2a+kb)$$

Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh

$$a + (a+b) + (a+2b) + ... + (a+(k-1)b) + (a+((k+1)-1)b)$$

$$= \underbrace{a + (a+b) + (a+2b) + ... + (a+(k-1)b)}_{P(k)} + (a+((k+1)-1)b)$$

$$= \frac{1}{2}k(2a+(k-1)b) + (a+((k+1)-1)b)$$

$$= \frac{1}{2}k(2a+bk-b) + (a+bk)$$

$$= ak + \frac{1}{2}bk^2 - \frac{1}{2}bk + a + bk$$

$$= ak + \frac{1}{2}bk^2 + \frac{1}{2}bk + a$$

$$= \frac{1}{2}\left(2ak + bk^2 + 2a + bk\right)$$

$$= \frac{1}{2}(k+1)(2a+kb)$$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai).
Karena langkah dasar dan langkah induktif dipenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika peryataan

$$P(n) = a + (a+b) + (a+2b) + ... + (a+(n-1)b) = \frac{1}{2}n(2a+(n-1)b)$$

benar untuk setiap n bilangan asli.

Contoh 2.

Gunakan induksi matematis untuk membuktikan bahwa rumus jumlah berhingga dari deret geometri dengan suku pertama a dan rasio r adalah

$$a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$$

Dengan $r > 1$ dan n adalah bilangan asli.

Jawab

Misalkan $P(n) = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$

Langkah dasar:

Untuk $n = 1$, $P(1)$ benar, karena

$$P(1) = \frac{a(r^1 - 1)}{r-1} = \frac{a(r-1)}{r-1} = a$$

Langkah dasar selesai.

Langkah Induktif:

Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

$$P(k) = a + ar + ar^2 + ... + ar^{k-1} = \frac{a(r^k - 1)}{r - 1}$$

Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ juga benar

$$P(k+1) = a + ar + ar^2 + ... + ar^{k-1} + ar^{(k+1)-1} = \frac{a(r^{k+1} - 1)}{r - 1}$$

Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh

$$\begin{aligned} a + ar + ar^2 + ... + ar^{k-1} + ar^{(k+1)-1} &= \underbrace{a + ar + ar^2 + ... + ar^{k-1}}_{P(k)} + ar^{(k+1)-1} \\ &= \frac{a(r^k - 1)}{r - 1} + ar^{(k+1)-1} \\ &= \frac{a(r^k - 1)}{r - 1} + ar^k \\ &= \frac{a(r^k - 1) + ar^k(r - 1)}{r - 1} \\ &= \frac{a(r^k - 1 + r^{k+1} - r^k)}{r - 1} \\ &= \frac{a(r^{k+1} - 1)}{r - 1} \end{aligned}$$

Kedua ruas dari $P(k + 1)$ sama, maka $P(k + 1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai).
Karena langkah dasar dan langkah induktif dipenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika peryataan

$$P(n) = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

benar untuk setiap n bilangan asli.

Contoh 3.

Untuk sebarang bilangan asli $n \geq 1$, buktikan bahwa

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Jawab

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Langkah dasar.

$P(1)$ benar, karena $1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1+1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$.

Langkah dasar selesai.

Langkah induktif.

Asumsikan hipotesis induktif bahwa $P(k)$ benar untuk sebarang bilangan asli k. Sehingga hipotesis induktif $P(k)$ adalah pernyataan bahwa

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ benar.

Untuk menyelesaikan hipotesis induktif, harus ditunjukkan bahwa jika $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ juga benar.
Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + k^2) + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6}\end{aligned}$$

Dengan demikian hal tersebut menunjukkan bahwa $P(k+1)$ benar berdasarkan asumsi bahwa $P(k)$ benar. Langkah induktif selesai.

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika kita telah menunjukkan bahwa

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

untuk sebarang bilangan asli $n \geq 1$.

2. Penerapan Induksi Matematika pada Keterbagian

Sebelum kita mengkaji lebih jauh tentang penerapan induksi matematika pada keterbagian, perlu ditegaskan makna keterbagian dalam hal ini, yaitu habis dibagi bukan hanya dapat dibagi.

Pernyataan "*a* habis dibagi *b*" bersinonim dengan:

- *a* kelipatan *b*
- *b* faktor dari *a*
- *b* membagi *a*

Jika *p* habis dibagi *a* dan *q* habis dibagi *a*, maka (*p* + *q*) juga habis dibagi *a*.
Sebagai contoh, 4 habis dibagi 2 dan 6 habis dibagi 2, maka (4 + 6) juga habis dibagi 2.

Contoh 4.

Buktikan bahwa $7^n - 1$ habis dibagi 6, untuk sebarang bilangan asli *n*.

Jawab

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan $7^n - 1$ habis dibagi 6.

Langkah dasar.

$P(1)$ benar karena $7^n - 1 = 7^1 - 1 = 7 - 1 = 6$ habis dibagi 6.
Langkah dasar selesai.

Langkah induktif.

Sebagai hipotesis induktif, asumsikan bahwa $P(k)$ benar, yaitu dengan mengasumsikan bahwa ($7^k - 1$) habis dibagi 6 untuk sebarang bilangan asli *k*. Sehingga P(*k*) dapat dinyatakan sebagai $7^k - 1 = 6c$ untuk sebarang bilangan asli *c*. Selanjutnya dengan asumsi bahwa $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$, yaitu pernyataan bahwa $7^{k+1} - 1$ habis dibagi 6, juga benar. Harus ditunjukkan bahwa $7^{k+1} - 1$ habis dibagi 6.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 7^{k+1}-1 &= 7^k(7)-1 \\ &= 7^k(6+1)-1 \\ &= 6.7^k+\underbrace{7^k-1}_{P(k)} \\ &= 6.7^k+6c \\ &= 6(7^k+c) \end{aligned}$$

Jelas bahwa ruas kanan $6(7^k+c)$ merupakan kelipatan 6. Jadi $P(k+1)$ benar.

Langkah induktif selesai.

Karena langkah dasar dan langkah induktif dipenuhi, menurut prinsip induksi matematika terbukti bahwa $7^n - 1$ habis dibagi 6 untuk sebarang bilangan asli n.

Contoh 5.

Buktikan bahwa 2 adalah faktor dari $n^2 + 5n$ untuk sebarang bilangan asli n.

Jawab

Untuk sebarang bilangan bulat positif n, misalkan $P(n)$ adalah pernyataan 2 adalah faktor dari $n^2 + 5n$.

Langkah dasar.

$P(1)$ benar karena $n^2 + 5n = 1^2 + 5 \cdot 1 = 6 = 2 \cdot 3$.
Sehingga 2 adalah faktor dari $n^2 + 5n$ untuk $n = 1$.
Langkah dasar selesai.

Langkah induktif.

Sebagai hipotesis induktif, asumsikan bahwa $P(k)$ benar, yaitu dengan mengasumsikan bahwa 2 adalah faktor dari $k^2 + 5k$ atau ekuivalen dengan $k^2 + 5k = 2c$ untuk sebarang bilangan asli c. Selanjutnya dengan asumsi bahwa $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$, yaitu pernyataan bahwa 2 adalah faktor dari $(k+1)^2 + 5(k+1)$, juga benar. Harus ditunjukkan bahwa 2 adalah faktor dari $(k+1)^2 + 5(k+1)$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} (k+1)^2 + 5(k+1) &= k^2 + 2k + 1 + 5k + 5 \\ &= (k^2 + 5k) + (2k + 6) \\ &= (k^2 + 5k) + 2(k + 3) \\ &= 2c + 2(k + 3) \\ &= 2(c + k + 3) \end{aligned}$$

Dari baris terakhir, karena bentuk $(c + k + 3)$ adalah bilangan bulat, maka jelas bahwa 2 adalah faktor dari $(k+1)^2 + 5(k+1)$. Jadi $P(k+1)$ benar.
Langkah induktif selesai.

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika terbukti bahwa 2 adalah faktor dari $n^2 + 5n$ untuk sebarang bilangan asli n.

3. Penerapan Induksi Matematika pada Ketidaksamaan

Sebelum kita mengkaji lebih jauh tentang penerapan induksi matematika pada ketidaksamaan, kita perlu memperhatikan sifat-sifat ketidaksamaan yang sering digunakan berikut ini.

- Sifat transitif
  a > b > c ⇒ a > c atau
  a < b < c ⇒ a < c
- a < b dan c > 0 ⇒ ac < bc atau
  a > b dan c > 0 ⇒ ac > bc
- a < b ⇒ a + c < b + c atau
  a > b ⇒ a + c > b + c

Contoh 6.

Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa $2^n < (n!)$ untuk sebarang bilangan asli n, dengan $n \geq 4$.

Jawab

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa $2^n < (n!)$. Perhatikan bahwa ketaksamaan salah untuk $n = 1, 2,$ dan 3.

Langkah dasar

Untuk membuktikan bahwa ketaksamaan benar untuk $n \geq 4$ mensyaratkan bahwa langkah dasar adalah $P(4)$. Perhatikan bahwa $P(4)$ benar karena $2^4 = 16 < 24 = 4!$. Langkah dasar selesai.

Langkah induktif

Asumsikan $P(k)$ benar untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 4$, yaitu asumsikan bahwa $2^k < (k!)$ untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 4$. Pada hipotesis induktif harus ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ juga benar. Dalam hal ini harus ditunjukkan jika $2^k < (k!)$ benar untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 4$, maka $2^{k+1} < (k+1)!$ juga benar.
Diperoleh

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2 \cdot 2^k \\ &< 2 \cdot k! \\ &< (k+1)k! \\ &= (k+1)! \end{aligned}$$

Telah ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ benar jika $P(k)$ benar. Langkah induktif selesai.

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah diselesaikan, maka menurut prinsip induksi matematika $P(n)$ benar untuk sebarang bilangan asli n dengan $n \geq 4$. Dengan demikian terbukti bahwa $2^n < (n!)$ benar untuk sebarang bilangan asli n dengan $n \geq 4$.

Contoh 7.

Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa ketaksamaan $n < 2^n$ untuk sebarang bilangan asli n.

Jawab

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa $n < 2^n$.

Langkah dasar.

$P(1)$ benar, karena $1 < 2^1 = 2$. Langkah dasar selesai.

Langkah induktif.

Asumsikan hipotesis induktif bahwa $P(k)$ benar untuk sebarang bilangan asli k. Sehingga hipotesis induktif $P(k)$ adalah pernyataan bahwa $k < 2^k$. Untuk menyelesaikan hipotesis induktif, harus ditunjukkan bahwa jika $P(k)$ benar, maka

$P(k+1)$, yaitu pernyataan bahwa $k+1 < 2^{k+1}$, juga benar. Dalam hal ini, kita tunjukkan bahwa jika $k < 2^k$, maka $k+1 < 2^{k+1}$.

Untuk menunjukkan bahwa pernyataan tersebut benar untuk sebarang bilangan asli k, tambahkan 1 ke dalam kedua ruas dari $k < 2^k$. Perhatikan bahwa $1 \leq 2^k$.
Hal ini menyebabkan

$$k+1 < 2^k + 1 \leq 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

Hal tersebut menunjukkan bahwa $P(k+1)$ benar, yaitu $k+1 < 2^{k+1}$, berdasarkan asumsi bahwa $P(k)$ benar. Langkah induktif selesai.

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika kita telah menunjukkan bahwa $n < 2^n$ benar untuk sebarang bilangan asli n.

C. Rangkuman

- Metode pembuktian dengan induksi matematika
  Pandang suatu pernyataan "Untuk sebarang bilangan asli $n \geq a$, dengan a adalah bilangan asli tertentu, sifat $P(n)$ bernilai benar." Untuk membuktikan pernyataan tersebut, kita akan menjalankan dua langkah berikut:
  1. Langkah dasar (*basis step*)
     Akan ditunjukkan bahwa $P(a)$ bernilai benar.
  2. Langkah induktif (*inductive step*)
     Akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan asli $k \geq a$, dengan a adalah bilangan asli tertentu, jika $P(k)$ bernilai benar maka $P(k+1)$ juga bernilai benar.

- Dalam penerapannya, prinsip induksi matematika dapat digunakan untuk membuktikan rumus jumlah barisan (deret), ketidaksamaan, dan keterbagian bilangan bulat.

D. Latihan Soal

Gunakan induksi matematis untuk membuktikan kebenaran pernyataan berikut.

1. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$ untuk sebarang bilangan asli n.
2. $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$ untuk sebarang bilangan asli n.
3. $3 + 9 + 15 + \cdots + (6n-3) = 3n^2$ untuk sebarang bilangan asli n.
4. $2 + 7 + 12 + \cdots + (5n-3) = \frac{1}{2}n(5n-1)$ untuk sebarang bilangan asli n.
5. $n^2 + n$ habis dibagi 2 untuk sebarang bilangan asli n.
6. $n^3 + 2n$ habis dibagi 3 untuk sebarang bilangan asli n.
7. $n^5 - n$ habis dibagi 5 untuk sebarang bilangan asli n.
8. $(n+1)^2 < 2n^2$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 3$.
9. $n! > 2^n$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 4$.
10. $\left(\frac{4}{3}\right)^n > n$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 7$.

PEMBAHASAN LATIHAN SOAL KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

1. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$ untuk sebarang bilangan asli n.

   Alternatif Penyelesaian

   Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa

   $$P(n) = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$$

   Langkah dasar.

   $P(1)$ benar, karena $1(1 + 1) = 2$

   Langkah dasar selesai.

   Langkah induktif.

   Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

   $$P(k) = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k(k + 1)$$

   Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ juga benar

   $$P(k + 1) = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2(k + 1) = (k + 1)((k + 1) + 1)$$

   Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh

   $$\begin{aligned} 2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2(k + 1) &= (2 + 4 + 6 + \cdots + 2k) + +2(k + 1) \\ &= k(k + 1) + 2(k + 1) \\ &= (k + 1)(k + 2) \\ &= (k + 1)((k + 1) + 1) \end{aligned}$$

   Kedua ruas dari $P(k + 1)$ sama, maka $P(k + 1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai).
   Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika kita telah menunjukkan bahwa $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$ untuk sebarang bilangan asli n.

2. $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$ untuk sebarang bilangan asli n.

   Alternatif Penyelesaian

   Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa

   $$P(n) = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$$

   Langkah dasar.

   $P(1)$ benar, karena $\frac{1(3(1)-1)}{2} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

   Langkah dasar selesai.

   Langkah induktif.

   Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

   $$P(k) = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3k - 2) = \frac{k(3k - 1)}{2}$$

   Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ juga benar

$$P(k+1) = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3k-2) + (3(k+1)-2) = \frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2}$$
$$= \frac{(k+1)(3k+2)}{2}$$

Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3k-2) + (3(k+1)-2)$$
$$= \big(1 + 4 + 7 + \cdots + (3k-2)\big) + (3(k+1)$$
$$= \frac{k(3k-1)}{2} + (3(k+1)-2)$$
$$= \frac{k(3k-1)}{2} + (3k+1)$$
$$= \frac{k(3k-1) + 2(3k+1)}{2}$$
$$= \frac{3k^2 - k + 6k + 2}{2}$$
$$= \frac{3k^2 + 5k + 2}{2} = \frac{(k+1)(3k+2)}{2}$$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai).

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika kita telah menunjukkan bahwa

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$$

untuk sebarang bilangan asli n.

3. $3 + 9 + 15 + \cdots + (6n-3) = 3n^2$ untuk sebarang bilangan asli n.

Alternatif Penyelesaian

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa

$$P(n) = 3 + 9 + 15 + \cdots + (6n-3) = 3n^2$$

Langkah dasar.

$P(1)$ benar, karena $3(1)^2 = 3$

Langkah dasar selesai.

Langkah induktif.

Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

$$P(k) = 3 + 9 + 15 + \cdots + (6k-3) = 3k^2$$

Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ juga benar

$$P(k+1) = 3 + 9 + 15 + \cdots + (6k-3) + (6(k+1)-3) = 3(k+1)^2$$

Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh

$$3+9+15+...+(6k-3)+(6(k+1)-3) = \big(3+9+15+...+(6k-3)\big)+(6(k+1)-3)$$
$$= 3k^2 + (6(k+1)-3)$$
$$= 3k^2 + 6k + 3$$
$$= 3(k^2 + 2k + 1)$$
$$= 3(k+1)^2$$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai).
Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika kita telah menunjukkan bahwa $3+9+15+\cdots+(6n-3)=3n^2$ untuk sebarang bilangan asli n.

4. $2+7+12+\cdots+(5n-3)=\frac{1}{2}n(5n-1)$ untuk sebarang bilangan asli n.

Alternatif Penyelesaian

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa

$$P(n)=2+7+12+\cdots+(5n-3)=\frac{1}{2}n(5n-1)$$

Langkah dasar.

$P(1)$ benar, karena $\frac{1}{2}(1)(5(1)-1)=\frac{1}{2}(4)=2$

Langkah dasar selesai.

Langkah induktif.

Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

$$P(k)=2+7+12+\cdots+(5k-3)=\frac{1}{2}k(5k-1)$$

Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ juga benar

$$\begin{aligned} P(k+1)=2+7+12+...+(5k-3)+(5(k+1)-3) &= \frac{1}{2}(k+1)(5(k+1)-1) \\ &= \frac{1}{2}(k+1)(5k+4) \end{aligned}$$

Dari ruas kiri $P(k+1)$ diperoleh

$$\begin{aligned} 2+7+12+...+(5k-3)+(5(k+1)-3) &= \left(2+7+12+...+(5k-3)\right)+(5(k+1)-3) \\ &= \frac{1}{2}k(5k-1)+(5(k+1)-3) \\ &= \frac{1}{2}k(5k-1)+(5k+2) \\ &= \frac{1}{2}\left(k(5k-1)+2(5k+2)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(5k^2-k+10k+4\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(5k^2+9k+4\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(k+1\right)(5k+4) \end{aligned}$$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai).
Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika kita telah menunjukkan bahwa $2+7+12+\cdots+(5n-3)=\frac{1}{2}n(5n-1)$ untuk sebarang bilangan asli n.

5. $n^2 + n$ habis dibagi 2 untuk sebarang bilangan asli n.

Alternatif Penyelesaian

Untuk sebarang bilangan bulat positif n, misalkan $P(n)$ adalah pernyataan 2 adalah faktor dari $n^2 + n$.

Langkah dasar.

$P(1)$ benar karena $n^2 + n = 1^2 + 1 = 2 = 2 \cdot 1$.
Sehingga 2 adalah faktor dari $n^2 + n$ untuk $n = 1$.
Langkah dasar selesai.

Langkah induktif.

Sebagai hipotesis induktif, asumsikan bahwa $P(k)$ benar, yaitu dengan mengasumsikan bahwa 2 adalah faktor dari $k^2 + k$ atau ekuivalen dengan $k^2 + k = 2c$ untuk sebarang bilangan asli c. Selanjutnya dengan asumsi bahwa $P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$, yaitu pernyataan bahwa 2 adalah faktor dari $(k+1)^2 + (k+1)$, juga benar. Harus ditunjukkan bahwa 2 adalah faktor dari $(k+1)^2 + (k+1)$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(k+1)^2 + (k+1) &= k^2 + 2k + 1 + k + 1 \\ &= (k^2 + k) + (2k + 2) \\ &= (k^2 + k) + 2(k + 1) \\ &= 2c + 2(k + 1) \\ &= 2(c + k + 1)\end{aligned}$$

Dari baris terakhir, karena bentuk $(c + k + 1)$ adalah bilangan bulat, maka jelas bahwa 2 adalah faktor dari $(k+1)^2 + (k+1)$. Jadi $P(k + 1)$ benar.
Langkah induktif selesai.

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika terbukti bahwa $n^2 + n$ habis dibagi 2 untuk sebarang bilangan asli n.

6. $n^3 + 2n$ habis dibagi 3 untuk sebarang bilangan asli n.
Alternatif Penyelesaian

Untuk sebarang bilangan bulat positif n, misalkan $P(n)$ adalah pernyataan 3 adalah faktor dari $n^3 + 2n$.

Langkah dasar.

$P(1)$ benar karena $n^3 + 2n = 1^3 + 2(1) = 3 = 3 \cdot 1$.
Sehingga 2 adalah faktor dari $n^3 + 2n$ untuk $n = 1$.
Langkah dasar selesai.

Langkah induktif.

Sebagai hipotesis induktif, asumsikan bahwa $P(k)$ benar, yaitu dengan mengasumsikan bahwa 3 adalah faktor dari $k^3 + 2k$ atau ekuivalen dengan $k^3 + 2k = 3c$ untuk sebarang bilangan asli c. Selanjutnya dengan asumsi bahwa $P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$, yaitu pernyataan bahwa 3 adalah faktor dari $(k+1)^3 + 2(k+1)$, juga benar. Harus ditunjukkan bahwa 3 adalah faktor dari $(k+1)^3 + 2(k+1)$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(k+1)^3+2(k+1) &= k^3+3k^2+3k+1+2k+2\\ &= (k^3+2k)+(3k^2+3k+3)\\ &= (k^3+2k)+3(k^2+k+1)\\ &= 3c+3(k^2+k+1)\\ &= 3(c+k^2+k+1)\end{aligned}$$

Dari baris terakhir, karena bentuk $(c+k^2+k+1)$ adalah bilangan bulat, maka jelas bahwa 3 adalah faktor dari $(k+1)^3+2(k+1)$. Jadi $P(k+1)$ benar.
Langkah induktif selesai.

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika terbukti bahwa n^3+2n habis dibagi 3 untuk sebarang bilangan asli n.

7. n^5-n habis dibagi 5 untuk sebarang bilangan asli n.
Alternatif Penyelesaian

Untuk sebarang bilangan bulat positif n, misalkan $P(n)$ adalah pernyataan 5 adalah faktor dari n^5-n.

Langkah dasar.

$P(1)$ benar karena $n^5-n=1^5-1=0=5\cdot 0$.
Sehingga 5 adalah faktor dari n^5-n untuk $n=1$.
Langkah dasar selesai.

Langkah induktif.

Sebagai hipotesis induktif, asumsikan bahwa $P(k)$ benar, yaitu dengan mengasumsikan bahwa 5 adalah faktor dari k^5-k atau ekuivalen dengan $k^5-k=5c$ untuk sebarang bilangan asli c. Selanjutnya dengan asumsi bahwa $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$, yaitu pernyataan bahwa 5 adalah faktor dari $(k+1)^5-(k+1)$, juga benar. Harus ditunjukkan bahwa 5 adalah faktor dari $(k+1)^5-(k+1)$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(k+1)^5-(k+1) &= k^5+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1-k-1\\ &= (k^5-k)+(5k^4+10k^3+10k^2+5k)\\ &= (k^5-k)+5(k^4+2k^3+2k^2+k)\\ &= 5c+5(k^4+2k^3+2k^2+k)\\ &= 5(c+k^4+2k^3+2k^2+k)\end{aligned}$$

Dari baris terakhir, karena bentuk $(c+k^4+2k^3+2k^2+k)$ adalah bilangan bulat, maka jelas bahwa 5 adalah faktor dari $(k+1)^5-(k+1)$. Jadi $P(k+1)$ benar.
Langkah induktif selesai.

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika terbukti bahwa n^5-n habis dibagi 5 untuk sebarang bilangan asli n.

8. $(n+1)^2<2n^2$ untuk sebarang bilangan asli $n\geq 3$.
Alternatif Penyelesaian

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa $(n+1)^2<2n^2$. Perhatikan bahwa ketaksamaan salah untuk $n=1$ dan 2

Langkah dasar

Untuk membuktikan bahwa ketaksamaan benar untuk $n \geq 3$ mensyaratkan bahwa langkah dasar adalah $P(3)$.
Perhatikan bahwa $P(3)$ benar karena $(3+1)^2 = 4^2 = 16 < 2(3^2) = 2(9) = 18$. Langkah dasar selesai.

Langkah induktif

Asumsikan $P(k)$ benar untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 3$, yaitu asumsikan bahwa $(k+1)^2 < 2k^2$ untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 3$. Pada hipotesis induktif harus ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ juga benar. Dalam hal ini harus ditunjukkan jika $(k+1)^2 < 2k^2$ benar untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 3$, maka $\left((k+1)+1\right)^2 < 2(k+1)^2$ juga benar.
Diperoleh

$$\begin{aligned}((k+1)+1)^2 &= (k+1)^2 + 2(k+1) + 1 \\ &< 2k^2 + 2k + 3 \\ &< 2k^2 + 2k + 3 + (2k-1) \\ &= 2k^2 + 4k + 2 \\ &= 2(k^2 + 2k + 1) \\ &= 2(k+1)^2\end{aligned}$$

Telah ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ benar jika $P(k)$ benar. Langkah induktif selesai.

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah diselesaikan, maka menurut prinsip induksi matematika $P(n)$ benar untuk sebarang bilangan asli n dengan $n \geq 3$. Dengan demikian terbukti bahwa $(n+1)^2 < 2n^2$ benar untuk sebarang bilangan asli n dengan $n \geq 3$.

9. $n! > 2^n$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 4$.
Alternatif Penyelesaian

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa $n! > 2^n$. Perhatikan bahwa ketaksamaan salah untuk $n = 1, 2,$ dan 3

Langkah dasar

Untuk membuktikan bahwa ketaksamaan benar untuk $n \geq 4$ mensyaratkan bahwa langkah dasar adalah $P(4)$.
Perhatikan bahwa $P(4)$ benar karena $4! = 4.3.2.1 = 24 > 2^4 = 16$. Langkah dasar selesai.

Langkah induktif

Asumsikan $P(k)$ benar untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 4$, yaitu asumsikan bahwa $k! > 2^k$ untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 4$. Pada hipotesis induktif harus ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ juga benar. Dalam hal ini harus ditunjukkan jika $k! > 2^k$ benar untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 4$, maka $(k+1)! > 2^{(k+1)}$ juga benar.
Diperoleh

$$\begin{aligned}(k+1)! &= (k+1) \times k! \\ &> 2^k \times (k+1) \\ &> 2^k \times 2 \quad \text{untuk } k \geq 4 \\ &= 2^{k+1}\end{aligned}$$

Telah ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ benar jika $P(k)$ benar. Langkah induktif selesai.

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah diselesaikan, maka menurut prinsip induksi matematika $P(n)$ benar untuk sebarang bilangan asli n dengan $n \geq 4$. Dengan demikian terbukti bahwa $n! > 2^n$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 4$.

10. $\left(\frac{4}{3}\right)^n > n$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 7$.
Alternatif Penyelesaian

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa $\left(\frac{4}{3}\right)^n > n$. Perhatikan bahwa ketaksamaan salah untuk $n = 2, 3, 4, 5,$ dan 6

Langkah dasar

Untuk membuktikan bahwa ketaksamaan benar untuk $n \geq 7$ mensyaratkan bahwa langkah dasar adalah $P(7)$.
Perhatikan bahwa $P(7)$ benar karena $\left(\frac{4}{3}\right)^7 = 7{,}49 > 7$. Langkah dasar selesai.

Langkah induktif

Asumsikan $P(k)$ benar untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 7$, yaitu asumsikan bahwa $\left(\frac{4}{3}\right)^k > k$ untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 7$. Pada hipotesis induktif harus ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ juga benar. Dalam hal ini harus ditunjukkan jika $\left(\frac{4}{3}\right)^k > k$ benar untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 7$, maka $\left(\frac{4}{3}\right)^{k+1} > (k+1)$ juga benar.

Diperoleh

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{3}\right)^{k+1} &= \left(\frac{4}{3}\right)^k \times \frac{4}{3} \\ &> k \times \frac{4}{3} \\ &= k\left(1 + \frac{1}{3}\right) \\ &= k + \frac{1}{3}k \\ &> k + 1 \quad \text{untuk } k \geq 7 \end{aligned}$$

Telah ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ benar jika $P(k)$ benar. Langkah induktif selesai.

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah diselesaikan, maka menurut prinsip induksi matematika $P(n)$ benar untuk sebarang bilangan asli n dengan $n \geq 7$. Dengan demikian terbukti bahwa $\left(\frac{4}{3}\right)^n > n$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 7$.

E. Penilaian Diri

Isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda pada kolom pilihan.

No	Pertanyaan	Ya	Tidak
1	Apakah Anda dapat menggunakan induksi matematika untuk membuktikan pernyataan matematis terkait jumlah barisan (deret)?	○	○
2	Apakah Anda dapat menggunakan induksi matematika untuk membuktikan pernyataan matematis terkait keterbagian bilangan bulat?	○	○
3	Apakah Anda dapat menggunakan induksi matematika untuk membuktikan pernyataan matematis terkait ketaksamaan?	○	○
JUMLAH			

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

EVALUASI

Gunakan induksi matematis untuk membuktikan kebenaran pernyataan berikut.

1. $2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} = 3^n - 1$ untuk sebarang bilangan asli n.
2. $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = 1 + (n-1) \cdot 2^n$ untuk sebarang bilangan asli n.
3. $3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \frac{3}{2}(3^n - 1)$ untuk sebarang bilangan asli n.
4. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ untuk sebarang bilangan asli n.
5. $n^3 - n + 3$ habis dibagi 3 untuk sebarang bilangan asli n.
6. $8^n - 3^n$ habis dibagi 5 untuk sebarang bilangan asli n.
7. $n^3 - n$ habis dibagi 6 untuk sebarang bilangan asli n.
8. $2n^2 > (n+1)^2$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 3$.
9. $2^n < (n+1)!$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 2$.
10. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 2$.

PEMBAHASAN SOAL EVALUASI

1. $2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} = 3^n - 1$ untuk sebarang bilangan asli n.

   Alternatif Penyelesaian

   Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa

   $$P(n) = 2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} = 3^n - 1$$

   Langkah dasar.

   $P(1)$ benar, karena $3^1 - 1 = 3 - 1 = 2$

   Langkah dasar selesai.

   Langkah induktif.

   Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

   $$P(k) = 2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{k-1} = 3^k - 1$$

   Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ juga benar

   $$P(k+1) = 2+6+18+...+2.3^{k-1}+2.3^{(k+1)-1} = 3^{(k+1)}-1$$

   Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh

   $$\begin{aligned} 2+6+18+...+2.3^{k-1}+2.3^{(k+1)-1} &= \left(2+6+18+...+2.3^{k-1}\right)+2.3^{(k+1)-1} \\ &= 3^k-1+2.3^{(k+1)-1} \\ &= 3^k-1+2.3^k \\ &= 3.3^k-1 \\ &= 3^{k+1}-1 \end{aligned}$$

   Kedua ruas dari $P(k + 1)$ sama, maka $P(k + 1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai).
   Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika kita telah menunjukkan bahwa
   $2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} = 3^n - 1$ untuk sebarang bilangan asli n.

2. $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = 1 + (n - 1) \cdot 2^n$ untuk sebarang bilangan asli n.

   Alternatif Penyelesaian

   Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa

   $$P(n) = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = 1 + (n - 1) \cdot 2^n$$

   Langkah dasar.

   $P(1)$ benar, karena $1 + (1 - 1).\, 2^1 = 1 + 0 = 1$

   Langkah dasar selesai.

   Langkah induktif.

   Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

   $$P(k) = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + k \cdot 2^{k-1} = 1 + (k - 1) \cdot 2^k$$

   Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ juga benar

   $$P(k+1) = 1+2.2+3.2^2+...+k.2^{k-1}+(k+1).2^{(k+1)-1} = 1+((k+1)-1).2^{k+1}$$

   Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh

   $$1+2.2+3.2^2+...+k.2^{k-1}+(k+1).2^{(k+1)-1} = \left(1+2.2+3.2^2+...+k.2^{k-1}\right)+(k+1).2^{(k+1)-1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(1+(k-1).2^k\right)+(k+1).2^{(k+1)-1} \\
&= (1+k.2^k-2^k)+(k+1).2^k \\
&= 1+k.2^k-2^k+k.2^k+2^k \\
&= 1+2k.2^k \\
&= 1+k.2^{k+1} \\
&= 1+((k+1)-1).2^{k+1}
\end{aligned}
$$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai).

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika kita telah menunjukkan bahwa
$1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots+n\cdot 2^{n-1}=1+(n-1)\cdot 2^n$ untuk sebarang bilangan asli n.

3. $3+3^2+3^3+\cdots+3^n=\frac{3}{2}(3^n-1)$ untuk sebarang bilangan asli n.

   Alternatif Penyelesaian

   Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa

   $$P(n)=3+3^2+3^3+\cdots+3^n=\frac{3}{2}(3^n-1)$$

   Langkah dasar.

   $P(1)$ benar, karena $\frac{3}{2}(3^1-1)=\frac{3}{2}(2)=3$

   Langkah dasar selesai.

   Langkah induktif.

   Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

   $$P(k)=3+3^2+3^3+\cdots+3^k=\frac{3}{2}\left(3^k-1\right)$$

   Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ juga benar

   $$P(k+1)=3+3^2+3^3+\cdots+3^k+3^{k+1}=\frac{3}{2}\left(3^{k+1}-1\right)$$

   Dari ruas kiri $P(k+1)$ diperoleh

   $$
   \begin{aligned}
   3+3^2+3^3+\ldots+3^k+3^{k+1} &= \left(3+3^2+3^3+\ldots+3^k\right)+3^{k+1} \\
   &= \frac{3}{2}(3^k-1)+3^{k+1} \\
   &= \frac{3}{2}.3^k-\frac{3}{2}+3.3^k \\
   &= \frac{9}{2}.3^k-\frac{3}{2} \\
   &= \frac{3}{2}(3.3^k-1) \\
   &= \frac{3}{2}(3^{k+1}-1)
   \end{aligned}
   $$

   Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai).

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika kita telah menunjukkan bahwa
$3+3^2+3^3+\cdots+3^n=\frac{3}{2}(3^n-1)$ untuk sebarang bilangan asli n.

4. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ untuk sebarang bilangan asli n.

Alternatif Penyelesaian

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa

$$P(n)=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

Langkah dasar.

$P(1)$ benar, karena $\frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)}=\frac{4}{4(2)(3)}=\frac{1}{1.2.3}$

Langkah dasar selesai.

Langkah induktif.

Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

$$P(k)=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}$$

Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ juga benar

$$P(k+1)=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+...+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2)}$$
$$=\frac{(k+1)((k+1)+3)}{4((k+1)+1)((k+1)+2)}$$

ekuivalen dengan

$$P(k+1)=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+...+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$
$$=\frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}$$

Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+...+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$
$$=\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$
$$=\frac{k(k+3)(k+3)+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$
$$=\frac{k(k^2+6k+9)+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$
$$=\frac{k^3+6k^2+9k+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$
$$=\frac{(k+1)^2(k+4)}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$
$$=\frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}$$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai).
Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika kita telah menunjukkan bahwa
$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ untuk sebarang bilangan asli n.

5. n^3-n+3 habis dibagi 3 untuk sebarang bilangan asli n.

   Alternatif Penyelesaian

   Untuk sebarang bilangan asli n, misalkan $P(n)$ adalah pernyataan 3 adalah faktor dari n^3-n+3.

   Langkah dasar.

   $P(1)$ benar karena $n^3-n+3=1^3-1+3=3=3\cdot1$.
   Sehingga 3 adalah faktor dari n^3-n+3 untuk $n=1$.
   Langkah dasar selesai.

   Langkah induktif.

   Sebagai hipotesis induktif, asumsikan bahwa $P(k)$ benar, yaitu dengan mengasumsikan bahwa 3 adalah faktor dari k^3-k+3 atau ekuivalen dengan $k^3-k+3=3c$ untuk sebarang bilangan asli c. Selanjutnya dengan asumsi bahwa $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$, yaitu pernyataan bahwa 3 adalah faktor dari $(k+1)^3-(k+1)+3$, juga benar. Harus ditunjukkan bahwa 3 adalah faktor dari $(k+1)^3-(k+1)+3$.

   Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
(k+1)^3-(k+1)+3 &= k^3+3k^2+3k+1-k-1+3 \\
&= (k^3-k+3)+3k^2+3k \\
&= (k^3-k+3)+3(k^2+k) \\
&= 3c+3(k^2+k) \\
&= 3(c+k^2+k)
\end{aligned}
$$

   Dari baris terakhir, karena bentuk $(c+k^2+k)$ adalah bilangan bulat, maka jelas bahwa 3 adalah faktor dari $(k+1)^3-(k+1)+3$. Jadi $P(k+1)$ benar.
   Langkah induktif selesai.

   Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika terbukti bahwa n^3-n+3 habis dibagi 3 untuk sebarang bilangan asli n.

6. 8^n-3^n habis dibagi 5 untuk sebarang bilangan asli n.

   Alternatif Penyelesaian

   Untuk sebarang bilangan asli n, misalkan $P(n)$ adalah pernyataan 5 adalah faktor dari 8^n-3^n.

   Langkah dasar.

   $P(1)$ benar karena $8^1-3^1=5=5\cdot1$.
   Sehingga 5 adalah faktor dari 8^n-3^n untuk $n=1$.
   Langkah dasar selesai.

   Langkah induktif.

   Sebagai hipotesis induktif, asumsikan bahwa $P(k)$ benar, yaitu dengan mengasumsikan bahwa 5 adalah faktor dari 8^k-3^k atau ekuivalen dengan 8^k-

$3^k = 5c$ untuk sebarang bilangan asli c. Selanjutnya dengan asumsi bahwa $P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$, yaitu pernyataan bahwa 5 adalah faktor dari $8^{k+1} - 3^{k+1}$, juga benar. Harus ditunjukkan bahwa 5 adalah faktor dari $8^{k+1} - 3^{k+1}$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 8^{k+1} - 3^{k+1} &= 8.8^k - 3.3^k \\ &= 3.8^k - 3.3^k + 5.8^k \\ &= 3(8^k - 3^k) + 5.8^k \\ &= 3(5c) + 5.8^k \\ &= 5(3c + 8^k) \end{aligned}$$

Dari baris terakhir, karena bentuk $(3c + 8^k)$ adalah bilangan bulat, maka jelas bahwa 5 adalah faktor dari $8^{k+1} - 3^{k+1}$. Jadi $P(k + 1)$ benar.
Langkah induktif selesai.

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika terbukti bahwa $8^n - 3^n$ habis dibagi 5 untuk sebarang bilangan asli n.

7. $n^3 - n$ habis dibagi 6 untuk sebarang bilangan asli n.

Alternatif Penyelesaian

Untuk sebarang bilangan asli n, misalkan $P(n)$ adalah pernyataan 6 adalah faktor dari $n^3 - n$.

Langkah dasar.

$P(1)$ benar karena $n^3 - n = 1^3 - 1 = 0 = 6 \cdot 0$.
Sehingga 6 adalah faktor dari $n^3 - n$ untuk $n = 1$.
Langkah dasar selesai.

Langkah induktif.

Sebagai hipotesis induktif, asumsikan bahwa $P(k)$ benar, yaitu dengan mengasumsikan bahwa 6 adalah faktor dari $k^3 - k$ atau ekuivalen dengan $k^3 - k = 6c$ untuk sebarang bilangan asli c. Selanjutnya dengan asumsi bahwa $P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$, yaitu pernyataan bahwa 6 adalah faktor dari $(k + 1)^3 - (k + 1)$, juga benar. Harus ditunjukkan bahwa 6 adalah faktor dari $(k + 1)^3 - (k + 1)$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} (k + 1)^3 - (k + 1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 \\ &= (k^3 - k) + (3k^2 + 3k) \\ &= (k^3 - k) + 3k(k + 1) \\ &= 6c + 3k(k + 1) \end{aligned}$$

Baris terakhir terdiri dari dua suku. Suku pertama $6c$ habis dibagi 6. Suku kedua $3k(k + 1)$ juga habis dibagi 6, karena mengandung faktor 3 dan salah satu di antara k atau $(k + 1)$ merupakan bilangan genap sehingga mengandung faktor 2. Oleh karena kedua sukunya habis dibagi 6, berarti 6 adalah faktor dari $(6c + 3k(k + 1))$.
Jadi $P(k + 1)$ benar.
Langkah induktif selesai.

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika terbukti bahwa $n^3 - n$ habis dibagi 6 untuk sebarang bilangan asli n.

8. $2n^2 > (n+1)^2$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 3$.

   Alternatif Penyelesaian

   Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa $2n^2 > (n+1)^2$. Perhatikan bahwa ketaksamaan salah untuk n = 1 dan 2.

   Langkah dasar

   Untuk membuktikan bahwa ketaksamaan benar untuk $n \geq 3$ mensyaratkan bahwa langkah dasar adalah $P(3)$.
   Perhatikan bahwa $P(3)$ benar karena $2(3)^2 = 18 > (3+1)^2 = 16$. Langkah dasar selesai.

   Langkah induktif

   Asumsikan $P(k)$ benar untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 3$, yaitu asumsikan bahwa $2k^2 > (k+1)^2$ untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 3$. Pada hipotesis induktif harus ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ juga benar. Dalam hal ini harus ditunjukkan jika $2k^2 > (k+1)^2$ benar untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 3$, maka $2(k+1)^2 > ((k+1)+1)^2 = (k+2)^2$ juga benar.

   Dari ruas kiri $P(k+1)$ diperoleh

   $$\begin{aligned} 2(k+1)^2 &= 2(k^2+2k+1) \\ &= 2k^2+4k+2 \\ &> (k+1)^2+4k+2 && \text{karena } 2k^2 > (k+1)^2 \\ &> (k+1)^2+2k+3 && \text{karena } 4k+2 > 2k+3, k \geq 1 \\ &= k^2+4k+4 \\ &= (k+2)^2 \end{aligned}$$

   Telah ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ benar jika $P(k)$ benar. Langkah induktif selesai.

   Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah diselesaikan, maka menurut prinsip induksi matematika $P(n)$ benar untuk sebarang bilangan asli n dengan $n \geq 3$. Dengan demikian terbukti bahwa $2n^2 > (n+1)^2$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 3$.

9. $2^n < (n+1)!$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 2$.

   Alternatif Penyelesaian

   Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa $2^n < (n+1)!$. Perhatikan bahwa ketaksamaan salah untuk $n = 1$

   Langkah dasar

   Untuk membuktikan bahwa ketaksamaan benar untuk $n \geq 2$ mensyaratkan bahwa langkah dasar adalah $P(2)$.
   Perhatikan bahwa $P(2)$ benar karena $2^2 = 4 < (2+1)! = 3! = 6$. Langkah dasar selesai.

   Langkah induktif

   Asumsikan $P(k)$ benar untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 2$, yaitu asumsikan bahwa $2^k < (k+1)!$ untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 2$. Pada hipotesis induktif harus ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ juga benar. Dalam hal ini harus ditunjukkan jika $2^k < (k+1)!$ benar untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 2$, maka $2^{k+1} < ((k+1)+1)!$ juga benar.
   Dari ruas kiri $P(k+1)$ peroleh

   $$2^{k+1} = 2^k . 2$$

$$\begin{aligned} &< (k+1)!\,.2 && \text{karena } 2^k < (k+1)! \\ &< (k+1)!.\,(k+2) && \text{karena } 2 < (k+2), k \geq 1 \\ &= (k+2)! \\ &= \big((k+1)+1\big)! \end{aligned}$$

Telah ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ benar jika $P(k)$ benar. Langkah induktif selesai.

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah diselesaikan, maka menurut prinsip induksi matematika $P(n)$ benar untuk sebarang bilangan asli n dengan $n \geq 2$. Dengan demikian terbukti bahwa $2^n < (n+1)!$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 2$.

10. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 2$.

Alternatif Penyelesaian

Langkah dasar

Untuk membuktikan bahwa ketaksamaan benar untuk $n \geq 2$ mensyaratkan bahwa langkah dasar adalah $P(2)$.

Perhatikan bahwa $P(2)$ benar karena $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1{,}707 > \sqrt{2} = 1{,}414$. Langkah dasar selesai.

Langkah induktif

Asumsikan $P(k)$ benar untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 2$, yaitu asumsikan bahwa

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}$$

untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 2$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ juga bernilai benar dengan menggunakan hipotesis induktif di atas. $P(k + 1)$ menyatakan:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$$

Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\ &> \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\ &= \frac{\sqrt{k}.\sqrt{k+1} + 1}{\sqrt{k+1}} \\ &= \frac{\sqrt{k^2+k} + 1}{\sqrt{k+1}} \\ &> \frac{\sqrt{k^2} + 1}{\sqrt{k+1}} \\ &= \frac{k+1}{\sqrt{k+1}} \\ &= \sqrt{k+1} \end{aligned}$$

Telah ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ benar jika $P(k)$ benar. Langkah induktif selesai.

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah diselesaikan, maka menurut prinsip induksi matematika $P(n)$ benar untuk sebarang bilangan asli n dengan $n \geq 2$. Dengan demikian terbukti bahwa $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 2$.

DAFTAR PUSTAKA

Husein Tampomas, 2007. *Seribu Pena Matematika Jilid 3 untuk SMA/MA Kelas XII*. Jakarta: Erlangga.

Sudianto Manullang, dkk. 2017. *Matematika SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI*. Jakarta: Kemendikbud.

Susanna S., 2020, Discrete Mathematics with Applications, Boston, MA: Brooks/Cole, Cengage Learning.

Wiworo, 2020. *Metode Pembuktian dengan Induksi Matematis.* Makalah Seri Webinar Guru Belajar, Direktorat Pendidikan Menengah dan Pendidikan Khusus, Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan, Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, Kamis, 30 Juli 2020